教材：《概率论与数理统计》（第二版）

赵进 傅冬生 谢兆茹 编

科学出版社 2020年

作业两周交一次（在教学立方提交，
缺交作业可且仅可下次补交）。
总评=期末*50%+期中*30%+平时*20%

学习重点：抓住教材，深入理解书中概念，适当做一些练习。

参考书：《概率论与数理统计》（第五版）
盛骤　编著　　高等教育出版社　2019年

第一章 随机事件与概率

- 现象的某个结果在给定条件下能否发生是完全可以预言的，这种现象被称为**必然现象**。
- 在一定条件下可能发生这样的结果，也可能发生那样的结果，即预先不能确定到底发生哪种结果的现象称为**随机现象。**

概率论的历史

- 伯努利(Bernoulli)十八世纪初“猜度术”；

切比雪夫

- 彼得堡学派十九世纪下半叶“随机变量”；

- 柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov)二十世纪三十年代“概率论的数学基础”

§1.1 随机事件及其运算

一. 随机试验及其运算

- 1. 随机试验：记为E。
- 2. 样本空间：试验中所有结果组成的集合。记为Ω。
- 3. 样本点或基本事件：试验的单个结果，记为e。
- 4. 事件：样本空间的任意子集。记为A，B，C。

- 必然事件，不可能事件。

- **例1.1.1** 掷一枚均匀的硬币，观察哪面朝上。则事件A={正面朝上}，B={反面朝上}都是随机事件。Ω={正面朝上或反面朝上}是必然事件, Φ={正反面两面都朝上}是不可能事件。
- **例1.1.2** 掷一颗均匀的骰子，观察朝上一面的点数，则A_i={掷出点数为i点}，i= 1,2,…,6 ；C={掷出点数为奇数点}；G={掷出点数大于1且小于5}等都是随机事件。Ω={掷出点数小于7}是必然事件, Φ={掷出点数小于1}是不可能事件。

二 .事件间的关系与运算

- 关系：包含与相等： $A \subset B; A = B.$
- 运算：
- 1. 并（或和）：A∪B
- 2. 交（或积）：A∩B或AB
- 3. 差 ：A-B
- 4. 对立事件：$\Omega - A = \overline{A}$

- **例1.1.3** 若A、B、C是三个事件，则：

1) A发生而B与C都不发生可表示为：

$$A\overline{B}\,\overline{C}\text{或}A-(B\cup C)$$

2) A与B都发生而C不发生可表示为：

$$AB\overline{C}\text{或}AB-C\text{或}AB-ABC$$

3) 这三个事件恰好有一个发生可表示为：

$$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$$

4) 这三个事件中至少有两个发生可表示为：

$$AB\cup BC\cup AC \quad \text{或}\ A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup ABC$$

事件的运算法则：

- 1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$　$AB=BA$
- 2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$
- 3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(AC)\cup(BC)$　$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$
- 4) **德摩根**（De Morgan）定理

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\,\overline{B},\qquad \overline{AB}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

对于n个事件，甚至对于可列个事件，德摩根定理也成立.

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_{i=1}\overline{A_i}\qquad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$$

§1.2 事件的概率及其性质

一.频率与概率

- **定义**：对于随机事件A，若在n次试验中A发生了 n_A次，则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为随机事件A在n次试验中出现的频率。

频率的性质

- (1) 非负性　$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$
- (2) 正规性　$f_n(\Omega)=1$
- (3) 有限可加性：即设事件$A_1, A_2, \ldots, A_m$互斥，则 $f_n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \ldots + f_n(A_m)$。

频率的稳定性

实验者	试验次数	正面朝上次数μ_n	频率 $f_n(A)=\mu_n/n$
De Morgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

- 投掷次数越多，频率越接近于0.5，也就是说，频率的稳定值为0.5。据此，我们自然可以用这个稳定值0.5来作为事件{出现正面朝上}的概率。即P(A)=0.5。
- 通常，把随机试验次数n增大，频率越来越稳定于一个确定的数值的规律说成是**频率具有稳定性**。

概率应具备以下基本性质：

- (1)　非负性　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- (2)　正规性　$P(\Omega)=1$
- (3)　有限可加性即设事件$A_1, A_2, \ldots, A_m$互斥，则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)= P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_m)$

二. 概率的定义及性质

- **定义**： 定义在事件上的一个集合函数P称为**概率**，如果它满足如下三个条件：

  （1） 非负性 $P(A)\geq 0$，$\forall A\in \Omega$

  （2） 正规性 $P(\Omega)=1$

  （3） 可列可加性 若$A_n\in\Omega$，$n=1,2,\ldots$，且两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的性质

- 1.P(Φ)=0;
- 2.有限可加性：

$$若A_iA_j=\Phi(i\neq j,i,j=1,\cdots,n)，则P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$$

- 3.P(A-B)=P(A)-P(AB)
- 4.加法定理：P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(AB)

概率的一般加法公式：设$A_1,\cdots,A_n$是任意n个随机事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}P(A_iA_jA_k)+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

- 5.对任意事件A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- 6.概率的连续性：

$$若A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, 则P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n);$$

$$若A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, 则P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

- **注：概率的可列可加性等价于有限可加性加上连续性。**

- 证明：令

$$B_n = A_n - A_{n-1}, n = 1, 2, \ldots, A_0 = \varnothing$$

于是 B_n互不相交，且

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [P(A_n) - P(A_{n-1})] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

§1.3 古典概型

若随机试验具有下列两个特征：

- （1）试验的所有基本事件只有有限个（有限样本空间），
- （2）试验中每个基本事件发生的可能性是相等的（等可 能性），

则把这类随机试验的数学模型称为**古典概型**。

计算公式

- 对于给定的古典概型，若基本事件总数为n，事件A包括其中的m个，则事件A的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包括的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{A\text{的有利事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

称为**古典概率**。（事件A包括的基本事件数，习惯上常常称为是A的有利事件数）

- 例**1.3.1**.袋中有 a只白球b只红球．从中将球依次取出，问第 k 次取出的球是红球的概率是多少?
- **解:**样本点总数为a+b球依次排列的所有种数(a+b)!。设A：第k个为红球，则第k个红球有b种选择，其余a+b-1个位置共有(a+b-1)！种排法，因此，A包含样本点数为b(a+b-1)！。得

$$P(A)=\frac{b(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{b}{a+b}$$

- 注意此结果与k无关。由此引申出“抽签原理”

- 例**1.3.2**：口袋中有4只白球，2只红球，从中随机抽取3只，求取得2只白球，1只红球的概率。
- 解：以A表示取得2只白球，1只红球的事件，则

$$P(A)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$$

- 例**1.3.3**：已知一批产品共N件，其中有M件次品，从中任取n件，试求恰有k件次品的概率。
- 解：以A表示从中任取n件恰有k件次品，则P(A)=？

（1）不放回抽取

$$P(A)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

（2）有放回抽取

$$P(A)=\frac{M^k(N-M)^{n-k}}{N^n}C_n^k$$

- 例**1.3.4**： 已知有n个人，每个人都等可能地被分配到N个房间中的任意一间去住，求下列事件的概率（N≥n）：
- 解：（1）指定的房间各自有1人住

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

（2）恰好有n个房间，其中各有1人住

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}C_N^n=\frac{A_N^n}{N^n}$$

- 某班50名学生任何两个生日都不在同一天的概率约为0.0296。

- 例**1.3.5**：设由k个盒子，每个盒子装有号码1到n的n个球。现从每个盒子中任取一球。求所取得的k个球中最大号码为m的概率。
- 解：

$$P(A)=\frac{m^k-(m-1)^k}{n^k}$$

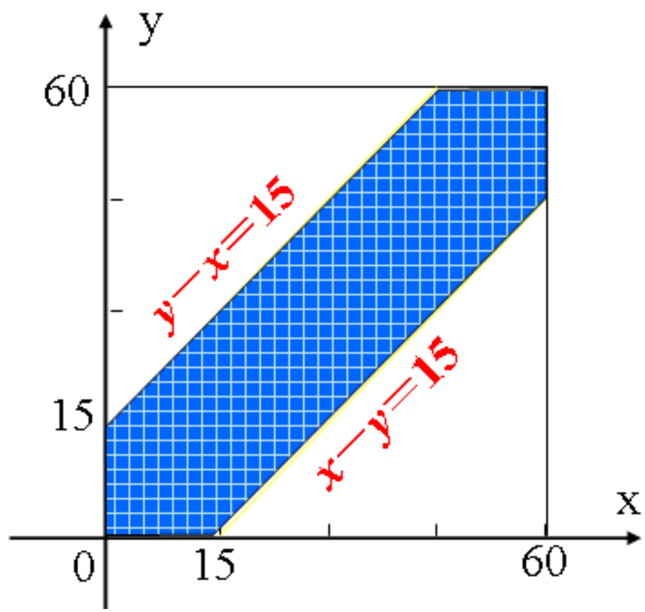
§1.4 几何概型

- 定义： 若随机试验的样本空间Ω对应一个度量有限的几何区域S，每一基本事件与S内任的点一一对应，则任一随机事件A对应Ω中的某一子区域D。若事件A的概率只和A对应的区域D的度量成正比，与D的形状及D在S中的位置无关。A发生的概率定义为：

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{A\text{对应区域}D\text{的度量}}{\Omega\text{对应区域}S\text{的度量}}$$

则称为几何概型。

- 例1.4.1.（会面问题）甲乙两人约定8点到9点间随机到达某地会面，两人约定先到者等候另一人15分钟，过时则离去。求两人能会面的概率。
- 解：以x, y表示甲乙的到达时刻，则样本空间Ω={ (x,y) | 0 ≤ x ≤ 60,0 ≤ y ≤ 60 }(分钟），为边长60的正方形。设A为两人能见面，则A为图中的阴影部分



$$\therefore\ P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}$$

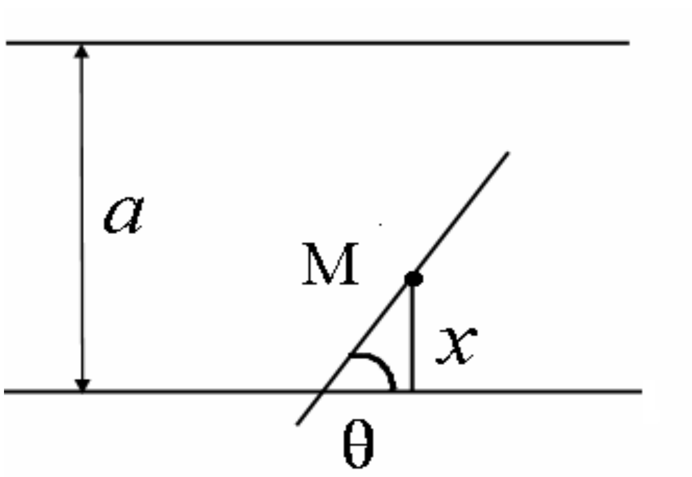
- 例**1.4.2**.（蒲丰投针问题）平面上有等距离的平行线，平行线间的距离为a。向此平面投掷一枚长为l (l≤a) 的针，求针与任一平行线相交的概率。
- **解**：设M为针的中点，M点到最近平行线的距离为x，针与平行线的夹角为θ。针的位置可由(x, θ)决定，可得样本空间 $\Omega=\{(x,\theta)\,|\,0\le x\le a/2, 0\le\theta\le\pi\}$

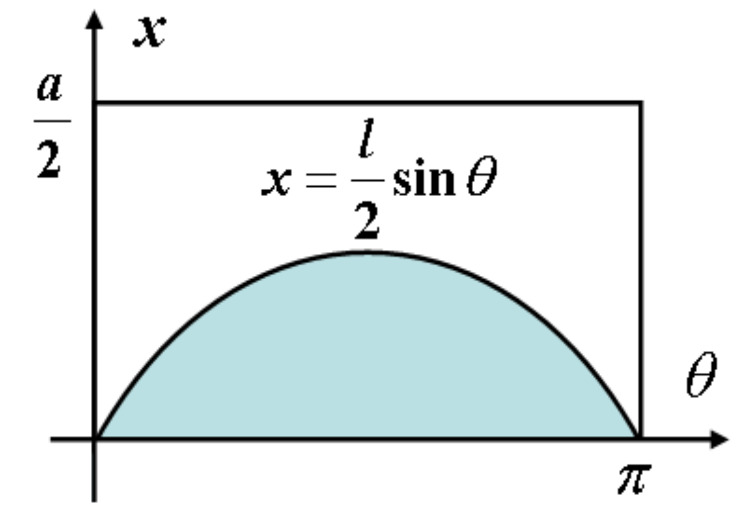
设A：针与任一条平行线相交。其充要条件为:

$$x\le\frac{l}{2}\sin\theta$$

从而

$$A=\{0\le x\le\frac{l}{2}\sin\theta,\ 0\le\theta\le\pi\}$$





$$\therefore \quad P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\theta d\theta}{a\pi/2}=\frac{2l}{a\pi}$$

蒲丰投针实验的应用

- 利用随机模拟方法计算π

$$P(A)=\frac{2l}{a\pi}\Rightarrow\pi=\frac{2l}{aP(A)}$$

- 利用P(A)≈m/n。其中n为投掷次数，m为相交次数。就可以近似计算π。

实验者	l/a	投掷次数n	相交次数m	π近似值
Wolf(1850年）	0.8	5000	2532	3.1596
Smith(1855年）	0.6	3204	1219	3.1541
De Morgan(1860年）	1.0	600	383	3.1332
Fox(1884年）	0.75	1030	489	3.1596

- 例**1.4.3**：在区间[0，1]上任取两数，问两数之和小于6/5的概率？
- 解：

$$P = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$$

§ 1.5 条件概率

- **例1.5.1** 一个家庭有两个小孩，假定男、女出生率一样，令B={这两个小孩一男一女}，A={两个小孩中至少有一女孩}. 所以P(B)=1/2.

  但若已知A发生了，即至少有一女孩，则考虑B发生的概率时，样本空间就缩减为Ω={（男，女），（女，男），（女，女）}，总数$n_A=3$，而有利基本事件数$n_{AB}=2$,从而

$$P(B \mid A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{2}{3}$$

另外 $\dfrac{n_{AB}}{n_A} = \dfrac{n_{AB}/n}{n_A/n} = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

所以 $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

一. 条件概率、乘法公式

- **定义：** 设A,B是试验E的两个随机事件，且P(A)>0,则称

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A发生的条件下，事件B发生的条件概率。

- **乘法公式：** P(AB)=P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)

- 推广到n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$的场合.即 $P(A_1 A_2 \ldots A_n)= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$

条件概率P(•|A)也是一种概率，也具有概率的三个基本性质:

- （1）非负性　P(B|A)≥0，∀B
- （2）正规性　P(Ω|A)=1
- （3）可列可加性 若B_i，i=1,2,…，两两互斥，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \mid A)$$

- 例**1.5.2**：某人手中有n把钥匙，只有一把能打开门，但到底是哪把他不知道，只能任取一把开门，用后分开，问他第k次才将门打开的概率是多大？
- 解：设A ={他第k次才将门打开}， A_i={第i次取出的钥匙能打开门} ，i=1，⋯, k, 则A =?

$$A=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots A_k$$

$$P(A)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)\cdots P(A_k\,|\,\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$

$$=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$$

- 例1.5.3: 已知一罐子中盛有k个白球，r个红球.每次随机地取出一个，记下它的颜色立即放回，同时加进与被取球的同色球c个.试求如接连取球三次，三次均为红球的概率.
- **解** 设A={三次取出的均为红球}

  A_i={第i次取出的是红球}，i=1，2，3,则A=?

$$A = A_1 A_2 A_3$$

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$$

$$= \frac{r}{r+k}\frac{r+c}{r+k+c}\frac{r+2c}{r+k+2c}$$

- 可以证明：$P(A_3|A_1A_2) > P(A_2|A_1) > P(A_1)$
- 卜里耶罐子模型常常被用作描述传染病的数学模型.

- 例**1.5.4**：盒中10个元件(4只次品6只正品)，从中任取2只，已知第一只是正品，求第二只是正品的概率。
- 解：设事件A表示第二只是正品，事件B表示第一只是正品。求P(A|B)。显然

$$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{10},P(AB)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3},\text{因此}$$

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/3}{6/10}=\frac{5}{9}.$$

- 例**1.5.5**：$P(A|\overline{B})=P(A)=0.6, P(\overline{A}\,\overline{B})=0.3$, 求$P(\overline{A}\cup B)$
- 解：

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=0.3,\quad \therefore P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=0.7$$

设$P(AB)=a$,

$$\therefore P(A\overline{B})=0.6-a, P(\overline{B})=1-P(B)=1-P(AB)-P(\overline{A}B)=1-a-0.1$$

于是$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.6-a}{1-a-0.1}=0.6$

$$\therefore a=0.15,$$

于是$P(\overline{A}\cup B)=1-P(A\overline{B})=1-(P(A)-P(AB))=0.55$

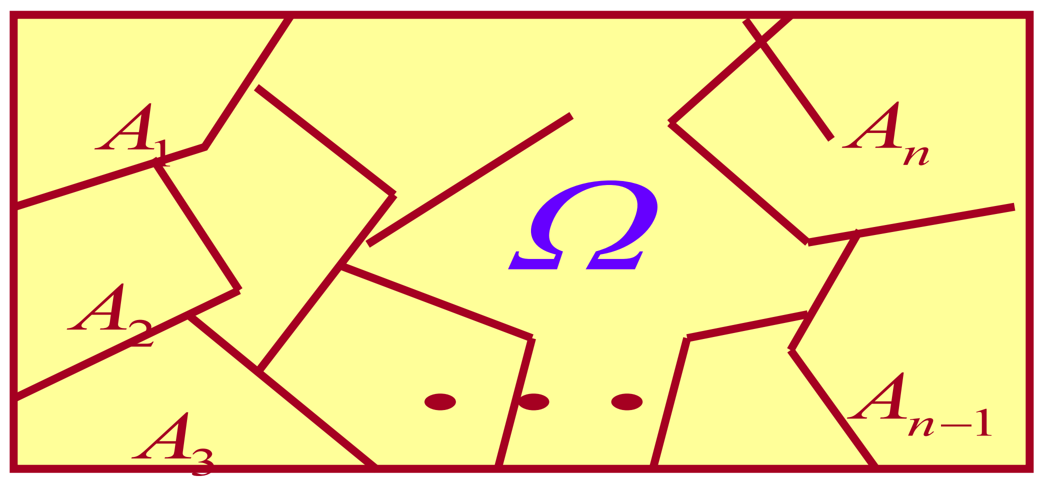
二. 全概公式和贝叶斯公式

设A_1, A_2, …,是随机试验E下的一组事件，如果满足

(1) $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$$ （完备性）

(2) $A_iA_j=\Phi(i\neq j, i,j=1,2,\ldots)$ （互斥性）

则称A_1, A_2, …为构成样本空间Ω的一个**划分**.



- 定理（全概率公式）：设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是样本空间Ω的一个划分，$P(A_i)>0, i= 1,2, \ldots, n$，B是任一事件，则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\mid A_i)$$

- 证明： $$\mathrm{P}(B)=P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\mid A_i)$$

- 全概率公式的直观解释：如果把事件B作为考察对象，那么事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$便是导致“结果”的“原因”。全概公式的主导思想是由因导果。

- **定理（贝叶斯公式）：** 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是样本空间Ω的一个划分，$P(A_i)>0, i= 1,2, \ldots, n$,B是任一事件，则有

$$\text{则}\forall i=1,2,\cdots,\ n,$$

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}\text{。}$$

- **证明：**

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

- 贝叶斯公式是英国学者贝叶斯去世后两年（1763年）由其朋友整理发表的，其中含有较为深刻的思想，并在二十世纪形成了贝叶斯学派。

- 贝叶斯公式的直观解释：如果把事件B作为考察对象，那么事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$便是导致“结果”的“原因”．贝叶斯公式要解决的问题正好与全概率公式相逆，所以也称为逆概公式，其主导思想是**执果索因**。

- **例1.5.6:** 某工厂有四条流水线生产同一种产品，该四条流水线的产量分别占总产量的15%，20%，30%和35%，又这四条流水线的不合格品率依次为0.05，0.04，0.03和0.02.现在从出厂产品中任取一件，问恰好抽到不合格品的概率是多少？
- 解：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.15\times 0.05+0.20\times 0.04+0.30\times 0.03+0.35\times 0.02=0.0315$$

- （**接上例**）在上述例子中，若该厂规定，出了不合格品要追究有关流水线的经济责任.现在在出厂产品中任取一件，结果为不合格品，但该件产品是哪一条流水线生产的标志已经脱落，问这件产品是第4条流水线生产的可能性有多大？
- 解：$P(A_4\mid B)=\dfrac{0.35\times 0.02}{0.0315}=\dfrac{2}{9}$

全

- 例**1.5.7**：甲袋有5个球(3红2白)，乙袋有8个球(4红4白)，现从甲袋任取2球放入乙袋，再从乙袋任取1球，问取白球的概率?
- 解：从甲袋取出2球有3种情况，设A_1：取出2白球；A_2：取出2红球；A_3：取出1红球和1白球。设B :最后取白球。则

$$P(A_1)=\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{10},P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},P(A_3)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}.$$

$$P(B|A_1)=\frac{6}{10},P(B|A_2)=\frac{4}{10},P(B|A_3)=\frac{5}{10}.$$

$$于是P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{10}\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\frac{5}{10}=\frac{48}{100}$$

贝

- 例**1.5.8**.（用血清法诊断肝癌）已知 $P(\bar{B} \mid \bar{A}) = 0.9$ P(B|A)=0.95, 其中A={检查者患有肝癌}，B={血清法诊断为肝癌}。设P(A)=0.0004。现有一人由血清法诊断为肝癌。求此人患有肝癌的概率。
- 解:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A})} =$$

$$\frac{0.0004 \times 0.95}{0.0004 \times 0.95 + 0.9996 \times 0.10} = 0.0038$$

§1.6 事件的独立性

一．独立性

1．两事件的独立性

- **直观解释：** 设A、B为试验E的二事件，若A、B的发生互不影响，则称事件A、 B**相互独立**。
- **定义：** 设A、B是任意二事件，若P(AB)=P(A)P(B)，则称事件A、B是**相互独立**的。
- 若事件A、B是**相互独立**，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

- 这说明事件A发生与否对事件B的发生没有影响。类似的，P(A|B)=P(A)。

- **例1.6.1**： 甲、乙两射手向同一目标射击，已知命中率分别为0.92，0.87，试求目标被击中的概率.

$= P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) =$

$P(C) = 1-(1-P(A))(1-P(B)) =$

- **解** 设C={目标被击中}，A={甲击中目标}，B={乙击中目标}

- **例1.6.2**：一夫妇生了三个小孩，用A表示既有男孩又有女孩，B表示至多一个男孩， 问A 、B是否相互独立？

$P(A) = 1-2\times\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ $\quad P(B) = \frac{C_3^1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad P(AB) = \frac{3}{8}$ 独立

- 独立与互不相容间的关系?

- **定理:** 若事件A、B相互独立，则下面三对事件也相互独立

$$[A, \overline{B}] \quad [\overline{A}, B] \quad [\overline{A}, \overline{B}]$$

2. 多个事件的独立性

- **定义:** 若A、B、C同时满足

  $P(AB)=P(A)P(B)$

  $P(AC)=P(A)P(C)$

  $P(BC)=P(B)P(C)$

  $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

  则称事件A、B、C是**相互独立**的.

- 由这个定义知道，若A、B、C相互独立，则A、B、C两两相互独立，但反之不然.

伯恩斯坦反例

- **例1.6.3** 设袋中有4个乒乓球，一个涂有白色，一个涂有红色，一个涂有蓝色，另一个涂有白、红、蓝三种颜色.今从袋中随机地取一球，以A、B、C分别记事件“出现白色”、“出现红色”、“出现蓝色”，则

$$P(A)=P(B)=P(C)=2/4=1/2,$$

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=1/4$$

从而A、B、C两两相互独立.

但

$$P(ABC)=1/4\neq 1/8= P(A)P(B)P(C)$$

所以

A、B、C不相互独立

- **定义:** 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个事件，若对任意的k（$2 \le k \le n$）及 $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$，有

$$P(A_{i1} A_{i2} \ldots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$$

则称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$是相互独立的.

- **例1.6.4**：设事件A_1, A_2, A_3相互独立，求证：$A_1 \cup A_2$，A_1A_2，$A_1 - A_2$均与A_3独立。

3° 即证 $P(A_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1 \bar{A}_2) P(A_3)$

$左 = P(A_1A_3 - A_1A_2A_3)$

$= P(A_1A_3) - P(A_1A_2A_3)$

$= P(A_1)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=P(A_1)P(A_3)(1-P(A_2))$

$=P(A_1)P(A_3)P(\bar{A}_2)$

$=P(A_1\bar{A}_2)P(A_3)$.

- **定理:** 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个事件，相互独立。将其任意分为k个组，每个组任意做可数的事件运算，得到一个新的事件，则这k个新事件相互独立。

- **例1.6.5**：小概率事件迟早会发生。

§1.7 独立重复试验概型

有一类重要的独立重复试验概型，具有如下特点：

（1）每次试验只有两个结果，$P(A)=p,\ P(\bar{A})=1-p=q$

（2）试验进行n次，每次试验的结果相互独立。

这样的试验我们称为**n重贝努里试验**。

定理： n重贝努里试验中，A发生k次的概率记为 $P_n(k)$，则

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

二项分布的近似(泊松定理）

- 设$X\sim B(n,p)$，当n很大，p很小时，则

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

其中$\lambda = np$

- 或

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

其中$\lambda = np_n$

- 证明：

重组。

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left\{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

- **例1.7.1**：某人射击，命中独立。已知他射2枪至少中1枪的概率是5/9，求他射3枪至少中1枪的概率。
- **解**：设射击不命中的概率为q.

$$1-q^2=\frac{5}{9},$$

$$q=\frac{2}{3},$$

$$\therefore P=1-q^3=\frac{19}{27}$$

- **例1.7.2**：工厂有独立运行的同型设备80台，每台发生故障的概率为0.01，发生故障时需一名维修人员排除。现有两种配备维修人员的方案，(1) 配备4人，每人负责维修20台设备；（2）配备3人，共同负责维修80台设备。分别求设备发生故障而得不到及时维修的概率。
- **解**：（1）设X_i为第i人负责的20台设备中同时发生的故障数， $X_i \sim B(20,0.01)$。记$A_i=\{X_i \ge 2\}$，所求概率：

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdots P(\overline{A}_4) = 1-(1-0.01686)^4 = 0.06575$$

- （2）设X为80台设备中同时发生的故障数。则

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} C_{80}^{k} 0.01^{k} 0.99^{80-k} = 0.00866$$